L2-MPI
S3

Examen d'Electromagnétisme (10 janvier 2013)

1/1

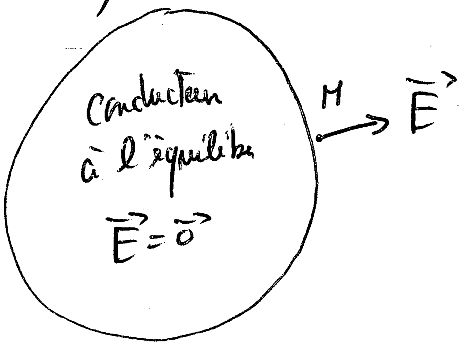
Exercice 1

a) Question de cours :

a.1) Un conducteur parfait est un matériau dans lequel des charges peuvent se déplacer librement.
A l'équilibre toutes les charges mobiles sont fixes (équilibre mécanique)

a.2) Dans un conducteur à l'équilibre : $\vec{E} = \vec{0}$; $\phi = c^{te}$ et $\rho = 0$

a.3)

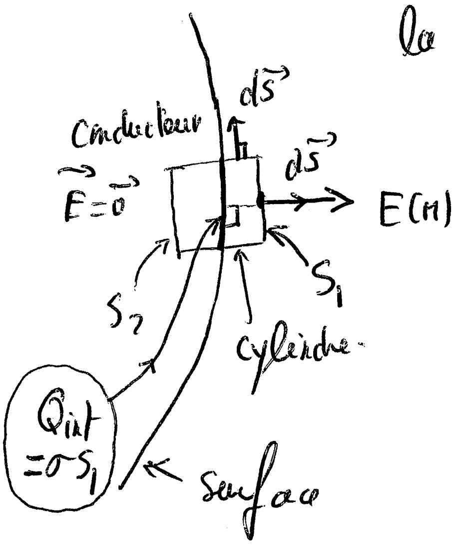


au voisinage à l'extérieur (du conducteur)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$ ← vecteur unitaire ⊥ à la surface, vers l'extérieur

Th de Coulomb

Démonstration. soit M très proche de la surface du conducteur à l'extérieur :
la surface est ~ plan infini (car M très proche)
⇒ symétrie du plan ∞ ⇒ $\vec{E}(M) \perp$ surface
$\vec{E}(M) = E(M)\,\vec{n}$



Surface de Gauss : cylindre ⊥ surface et les bases // à la surface : S_1 (à l'extérieur) et S_2 (à l'intérieur)

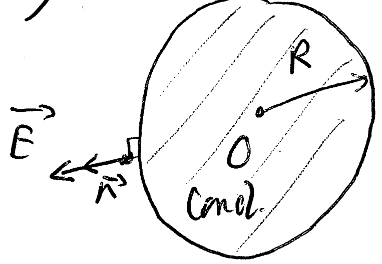
$$\oint\!\!\oint_{S_{Gauss}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_{cylindre} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{=0} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{=0}$$

$$= E(M)\,S_1$$

Th. de Gauss : $\oiint_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0}$

donc $E(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} n$ et $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$

b)



sphère conductrice seule au potentiel ϕ

$\phi(O) = \phi$ car $\phi = c^{te}$ dans le conducteur

$$\phi(O) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

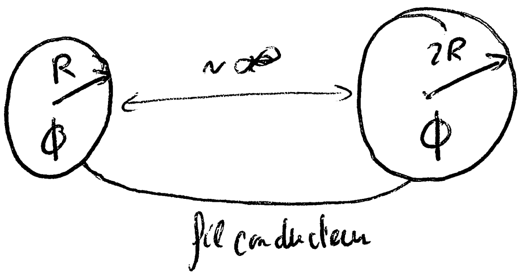
$$\Rightarrow Q = \phi \, 4\pi \varepsilon_0 R$$

donc $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ répartition uniforme de la charge car la sphère est seule donc isotrope

$$\sigma = \frac{\phi \, 4\pi \varepsilon_0 R}{4\pi R^2} = \phi \frac{\varepsilon_0}{R}$$

Donc d'après a 3) $\vec{E}$(au voisinage de la surface à l'extérieur) $= \frac{\phi}{R} \vec{n}$

c)



Les 2 sphères sont supposées seules mais au même potentiel car elles sont reliées par un fil conducteur

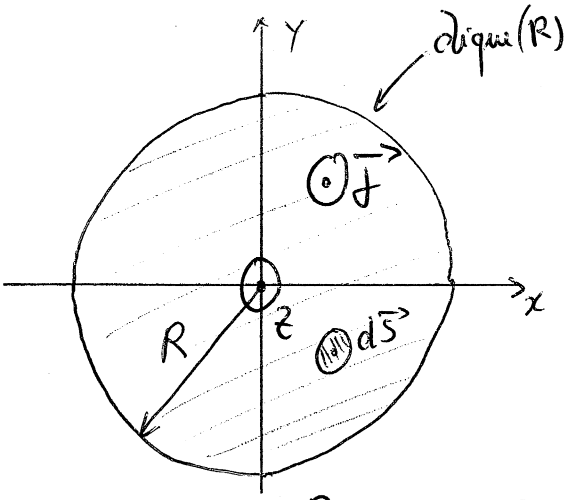
Le champ au voisinage de la sphère de rayon 2R est donc d'après b)

$$\vec{E} = \frac{\phi}{2R} \vec{n} \quad \left(\text{et } \frac{\phi}{2R} < \frac{\phi}{R}\right)$$

d) D'après $E = \frac{\phi}{R}$ au voisinage d'un conducteur sphérique : on constate que ce champ ↗ si le rayon de courbure de la surface du conducteur ↘

c'est l'effet de pointe.

Exercice n°2



a) $$I(R) = \iint_{\text{disque}(R)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

avec $d\vec{S} = dS\,\vec{u_z} = dr\, r d\theta\, \vec{u_z}$ (coord. cylindriques)

$$I(R) = \iint_{\text{disque}(R)} j_0\, e^{-\frac{r^2}{r_0^2}}\, r\, dr\, d\theta$$

$$I(R) = \int_0^R dr\, r e^{-r^2/r_0^2} \int_0^{2\pi} d\theta = \underline{\pi j_0 r_0^2 \left(1 - e^{-R^2/r_0^2}\right)}$$

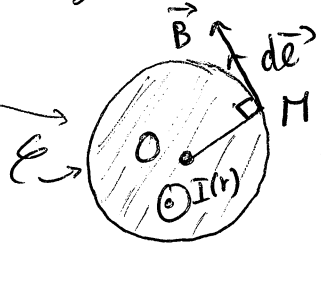
b) • $\forall M$, le plan contenant (Oz) et M est plan de symétrie de la distribution de courant donc $\vec{B}(M) \perp$ ce plan $\Rightarrow \vec{B}(M) = B(M)\,\vec{u_\theta}$

• Invariance de la distribution de courant par toutes les rotations autour de l'axe (Oz), donc $B(M) = B(r)$ avec r = distance à l'axe (Oz) (coord. cylindriques)

$$\Rightarrow \underline{\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u_\theta}}$$

c) Th. d'Ampère avec un contour fermé $\mathcal{C}$ = cercle de rayon $r = r_M$ et centré sur l'axe (Oz)

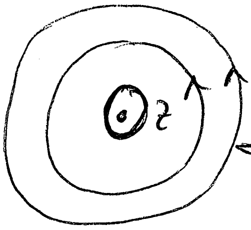
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I(r)$$



$d\vec{\ell} = r d\theta\, \vec{u_\theta}$

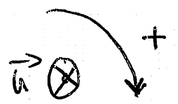
$$2\pi r\, B(r) = \mu_0 I(r)$$

donc $$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}\,\vec{u_\theta} = \underline{j_0 \frac{\mu_0 r_0^2}{2r}\left(1 - e^{-r^2/r_0^2}\right)\vec{u_\theta}}$$



lignes de champ de $\vec{B}$ = cercles centrés sur l'axe (Oz)

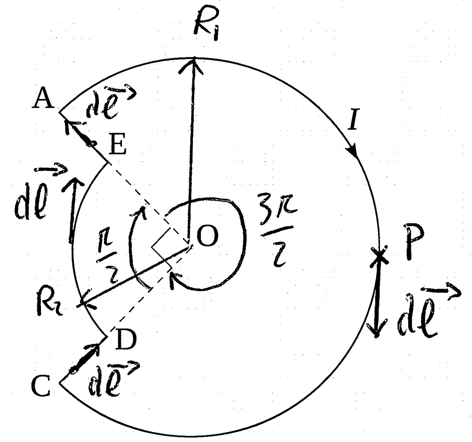
Exercice n°3 :



← sens + pour les angles (choix)

$R_1 = OA$

$R_2 = OD$



Loi de Biot et Savart

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{Circuit}} \frac{I\,\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{PO^3}$$

avec $\vec{dl}$ dans le sens de I

$$\vec{B}(O) = \int_{A,\text{ le long du cercle } R_1}^{C} \frac{\mu_0 I\,\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{4\pi\, PO^3} + \int_{C}^{D} \frac{\mu_0 I\,\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{4\pi\, PO^3} + \int_{D \text{ le long du cercle } R_2}^{E} \frac{\mu_0 I\,\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{4\pi\, PO^3} + \int_{E}^{A} \frac{\mu_0 I\,\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{4\pi\, PO^3}$$

(pour les intégrales de C à D et de E à A) : $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = \vec{0}$ car $\vec{dl} \,//\, (PO)$

le long de $A \to C$ et de $D \to E$: $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = dl \times PO \times \vec{u}$ ← voir le sens de $\vec{u}$ sur le schéma, $\|\vec{u}\| = 1$

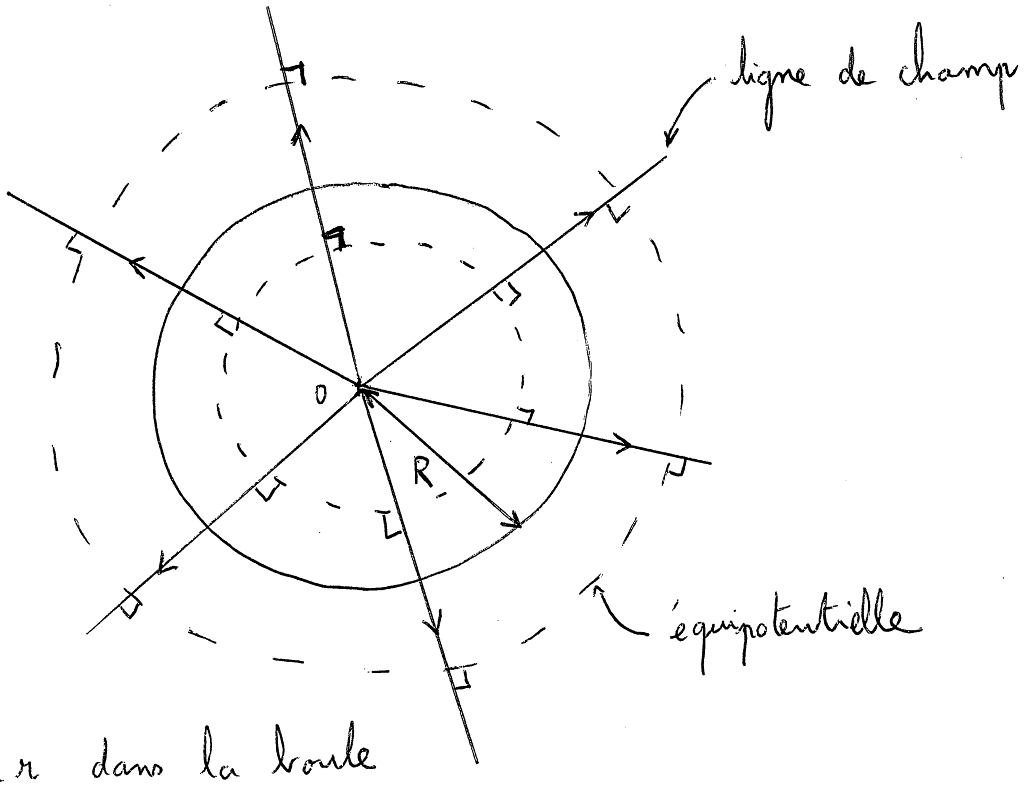
donc :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} \vec{u} \int_A^C dl + \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2} \vec{u} \int_D^E dl$$

$$= \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1^2} \frac{3\pi}{2} R_1 + \frac{\mu_0 I}{4\pi R_2^2} \frac{\pi}{2} R_2 \right) \vec{u}$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{8} \left(\frac{3}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \vec{u}$$

Exo 4:



$\rho(r) = a r$ dans la boule

a) Charge totale de la boule :

$$Q = \iiint_{boule} \rho \, d\tau = \int_0^R \rho(r) \, 4\pi r^2 \, dr = 4\pi a \int_0^R r^3 \, dr$$

$$= \pi a R^4.$$

b) • Symétries : en un point M de l'espace, tous les plans contenant (OM) sont plans de symétrie de la distribution de charges

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E(M) \, \vec{u_r}$$

• Invariance par rotation selon θ et φ

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E(r) \, \vec{u_r} .$$

c) Calcul de $\vec{E}(M)$:

Théorème de GAUSS sur une sphère de rayon r centrée en O $\Rightarrow$ $\vec{n} = \vec{u_r}$ en tout point de cette surface

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \oiint E(r)\, \vec{u_r} \cdot dS\, \vec{u_r} = \oiint E(r)\, dS$$

$$= E(r) \oiint dS \quad \text{car } r \text{ est fixé}$$

$$= E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

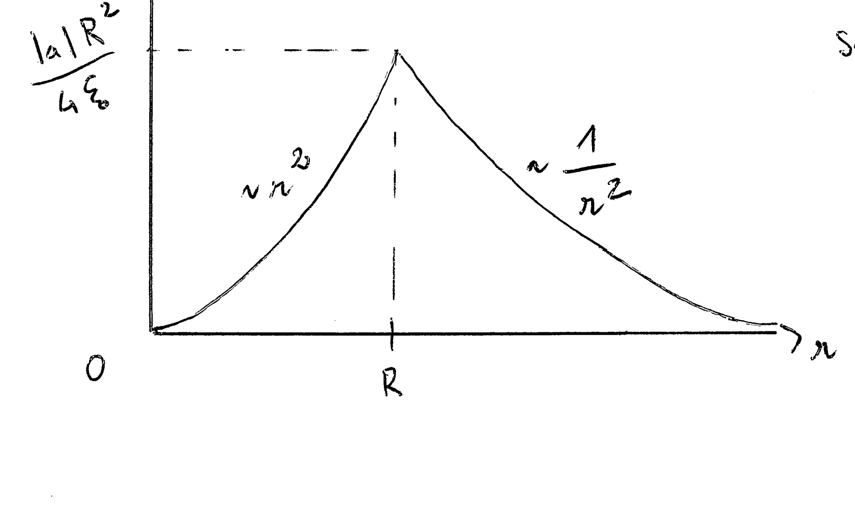
2 cas à distinguer :

- $r > R$: $q_{int} = Q = \pi a R^4$

$$\Rightarrow E(r > R) = \frac{\pi a R^4}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{a R^4}{4 \varepsilon_0 r^2}$$

- $r < R$: $q_{int} = \int_0^r \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr = \pi a r^4$

$$\Rightarrow E(r < R) = \frac{\pi a r^4}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{a r^2}{4 \varepsilon_0}$$



les lignes de champ sont les droites radiales

d) Calcul du potentiel $\phi(M)$:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,\phi \Rightarrow d\phi = -\vec{E}\cdot d\overrightarrow{OM}$$
$$= -E(r)\,dr \quad \text{ici}$$

$\Rightarrow \phi = \phi(r)$

2 cas :

- $r > R$: $E(r>R) = \dfrac{aR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$

$$\Rightarrow \phi(r>R) = \frac{aR^4}{4\varepsilon_0 r} + \underbrace{c^{te}_1}_{=0 \text{ car } \lim_{r\to+\infty}\phi(r) = 0}$$
$$= \frac{aR^4}{4\varepsilon_0 r}$$

- $r < R$: $E(r<R) = \dfrac{ar^2}{4\varepsilon_0}$

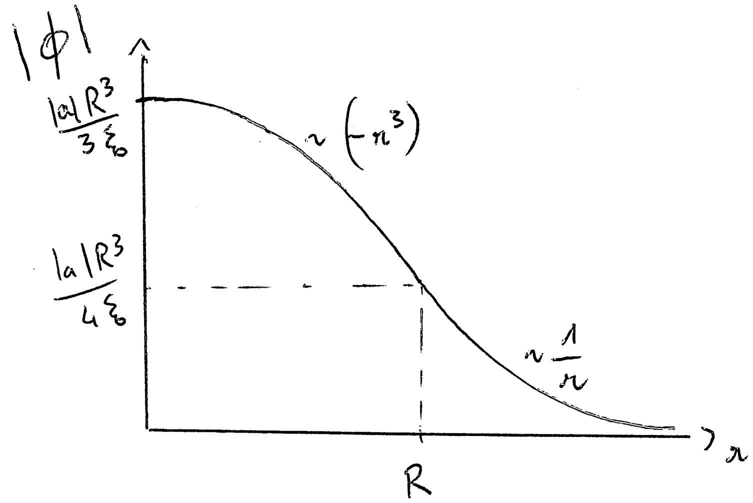
$$\Rightarrow \phi(r<R) = -\frac{ar^3}{12\varepsilon_0} + c^{te}_2$$

continuité de ϕ en $r = R$

$$\Rightarrow \phi(r \overset{>}{=} R) = \frac{aR^3}{4\varepsilon_0} = \phi(r \overset{<}{=} R) = -\frac{aR^3}{12\varepsilon_0} + c^{te}_2$$

$$\Rightarrow c^{te}_2 = \frac{aR^3}{3\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \phi(r<R) = \frac{a}{3\varepsilon_0}\left(R^3 - \frac{r^3}{4}\right)$$



e) On ajoute σ densité surfacique de charge uniforme à la surface de la boule

on a toujours : $E(r>R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

avec Q la nouvelle charge totale de la boule

$\Rightarrow E(r>R) = 0 \Rightarrow Q = 0 = \pi a R^4 + \sigma 4\pi R^2$

$$\Rightarrow \sigma = -\frac{aR^2}{4}.$$